SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

STIME SUB-ELLITTICHE E METRICHE RIEMANNIANE SINGOLARI

PARTE I

17 MARZO 1983

1. In un aperto Ω di R^n, $n \geq 2$, si consideri l'operatore a coefficienti reali

$$(1.1) \qquad L = \sum_{i,j} \partial_i (b_{ij}\, \partial_j) + \sum_i b_i\, \partial_i + c \ , \quad \partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r} \ ,$$

dove $B = (b_{i,j})$ è una matrice simmetrica semidefinita positiva in ogni punto di Ω.

Nello studio della regolarità locale delle soluzioni dell'equazione $Lu = f$, si presenta sovente il problema di determinare un numero reale positivo $\varepsilon (\leq 1)$ tale che

$$(1.2) \qquad \|u\|_\varepsilon \leq C\|u; W_L\| \equiv C(\|u\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j} b_{i,j}\, \partial_i u\, \partial_j u \, dx)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$ con supp $u \subseteq K \subset\subset \Omega$, $C = C(K,\varepsilon) > 0$. Qui $\| \ \|$ indica la norma di L_2 e $\| \ \|_\varepsilon$ la norma dello spazio di Sobolev H^ε.

Nel seguito, per indicare che vale (1.2), scriveremo

$$(1.3) \qquad W_L \hookrightarrow H^\varepsilon$$

Dalla disuguaglianza (1.2), se i coefficienti $b_{i,j}$, b_i, c sono C^∞, si ricava, come noto, la ipoellitticità di L in Ω. D'altra parte, anche nell'ipotesi di sola misurabilità per i coefficienti di L, dalla (1.2) si possono ricavare utili informazioni sulle soluzioni deboli di $Lu = 0$ quali, ad esempio, la loro limitatezza locale.

Nel corso di questa esposizione ci limiteremo a considerare il problema (1.3) per gli operatori a coefficienti C^∞; in questo caso Fefferman e Phong hanno ottenuto, molto recentemente, un risultato definitivo ([2]).

Nel caso non regolare il problema è stato studiato, in una situazione particolare, in [3].

Se l'operatore L si può scrivere nella forma seguente

$$(1.4) \qquad L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2$$

dove $X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, \partial_k$, $j = 1,\dots,p$, sono operatori del primo ordine a coefficienti C^∞, risulta

$$(1.5) \qquad \| u; W_L \| \cong \| u \| + \sum_{j=1}^{p} \| X_j u \|$$

ed allora, perché valga (1.3), è sufficiente che risulti soddisfatta la seguente condizione di Hörmander ([6])

$$(H) \qquad \text{rango } \mathcal{L}(X_1,\dots,X_p)\,(x) = n \;, \qquad \forall\, x \in \Omega \;,$$

dove $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_p)$ indica l'algebra di Lie generata dai vettori $X_j = (a_{1,j},\dots,a_{n,j})^{(*)}$, $j = 1,2,\dots,p$.

Sotto questa ipotesi si può dare una precisa stima dell'ordine dello spazio H^ε contenuto in W_L. A questo scopo introduciamo alcune notazioni che utilizzeremo anche nel seguito.

Se $I = (i_1,\dots,i_k)$ è un multi-indice a valori in $\{1,2,\dots,p\}$, poniamo $|I| = k$ ed indichiamo con X_I l'operatore differenziale

---

(*) Converremo sempre di identificare l'operatore differenziale $\sum_{j=1}^{n} a_j\, \partial_j$ col campo vettoriale $(a_1,\dots,a_n)$.

$$X_I = \begin{cases} X_{i_1}, & \text{se } I = (i_1) \\ [X_{i_1}, X_{i_2}], & \text{se } I = (i_1, i_2) \\ [X_{i_1}, X_{(i_2,\dots,i_k)}] & \text{se } I = (i_1, i_2, \dots, i_k),\ k \geq 2 . \end{cases}$$

Diremo che X_I è un commutatore di ordine $|I|$ dei campi $X_1, \dots, X_p$.

<u>Teorema 1.6</u> (Rothschild-Stein 7). Risulta

$$W_L \hookrightarrow H^{1/m}$$

se, $\forall\, K \subset\subset \Omega$, $\forall\, x \in K$, esistono n multi-indici $I_1, \dots, I_n$ tali che

i) $X_{I_1}(x), \dots, X_{I_n}(x)$ sono linearmente indipendenti;

ii) $|I_1|, \dots, |I_n| \leq m$.

<u>Esempio 1.7</u>. Consideriamo in R^3 l'operatore

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 \equiv X_1^2 + X_2^2 .$$

Notiamo che la matrice B in questo caso è la seguente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & x_1 \\ 0 & x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il più piccolo autovalore di B è $\equiv 0$ e, quindi, L non è ellittico in nessun punto di R^3.

D'altra parte $X_{(1,2)} = [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial x_2}$; pertanto, essendo

$$\det[X_1,X_2,X_{(1,2)}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 ,$$

$X_1, X_2, X_{(1,2)}$ sono lin. indip. in ogni punto di R^3. Essendo poi, ovviamente, $|(1)|$, $|(2)|$, $|(1,2)| \leq 2$, per il Teorema 1.6 risulta

$$W_L \hookrightarrow H^{1/2}$$

Se i coefficienti di L sono analitici reali e se L si può scrivere nella forma (1.4), la condizione di Hörmander (H) è anche necessaria per l'immersione $W_L \hookrightarrow H^{\varepsilon}$, per un opportuno $\varepsilon > 0$ ([1]).

Una condizione necessaria e sufficiente, nel caso C^{∞}, è stata fornita da Fefferman e Phong ([2]); tale caratterizzazione è di tipo geometrico e si esprime in termini delle proprietà di una distanza d associata in modo "naturale" all'operatore L.

2. CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DELL'IMMERSIONE $W_L \hookrightarrow H^{\varepsilon}$

Consideriamo dapprima il caso in cui $L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2$. Supponiamo che per ogni coppia di punti $x,y \in \Omega$ esista una curva $\gamma_{(x,y)} = \gamma: [0,1] \to \Omega$, $C^{(1)}$ a tratti e tale che

(2.1) $\qquad \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$

(2.2) $\qquad \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t)\, X_j(\gamma(t))$

dove $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_p): [0,1] \to R^p$ è una funzione continua a tratti.

Se indichiamo con A la matrice

$$A = [X_1, \dots, X_p] ,$$

la (2.2) si scrive così

$$(2.2') \qquad \dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))\ \lambda(t) ,$$

e γ è soluzione del problema *di controllo*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)\ \lambda(t) \\ x(0) = x \ , \quad x(1) = y \end{cases}$$

Ora, se $0 < \varepsilon < 1$, l'immersione $W_L \hookrightarrow H^{\varepsilon}$ è conseguenza della disuguaglianza seguente:

$$(2.3) \qquad \iint_{S \times S} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\varepsilon}}\ dx\ dy \leq C \int_{R^n} \left(\sum_{j=1}^{p} |X_j u|^2 \right) dx ,$$

dove S è una sfera di centro l'origine e raggio $r = 2\ \mathrm{diam}(K)$, $\Omega \supset\supset K \supseteq \mathrm{supp}\ u$ (non è restrittivo supporre $0 \in K$).

Utilizzando la curva γ, si ha

$$|u(x) - u(y)|^2 = \left| \int_0^1 (u(\gamma(t)))\ dt \right|^2 =$$

$$= \left| \int_0^1 < \nabla u(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) > dt \right|^2 = \left| \int_0^1 < \nabla u(\gamma(t)), A(\gamma(t))\ \lambda(t) > dt \right|^2 =$$

$$= \text{(indicando con } A^T \text{ la trasposta di A)} =$$

$$= \left| \int_0^1 < A^\tau(\gamma(t))\ \nabla u(\gamma(t)) \cdot \lambda(t) > dt \right|^2 \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 |A^\tau(\gamma(t))\ \nabla u(\gamma(t))|^2\, dt \right) \left(\int_0^1 |\lambda(t)|^2\, dt \right) =$$

$$= \left(\int_0^1 \sum_{j=1}^{p} |X_j(\gamma(t))\ u(\gamma(t))|^2\, dt \right) \left(\int_0^1 |\lambda(t)|^2\, dt \right) .$$

Posto

$$(2.4) \qquad I_2(\gamma) = \left(\int_0^1 |\lambda(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

risulta

$$\iint_{S \times S} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{n+2\varepsilon}}\, dx\, dy \leq \int_0^1 dt \iint_{S \times S} \sum_{j=1}^{p} |X_j u)(\gamma(t))| \frac{I_2^2(\gamma) dx\, dy}{|x-y|^{n+2\varepsilon}}$$

Supponiamo ora che per ogni fissato $(t,x) \in [0,1] \times S$, $z = \gamma(t) \equiv \gamma_{(x,y)}(t)$ sia un cambiamento di variabile con $|\partial z/\partial y| \leq C$, C indipendente da (t,x). Allora:

$$(2.5) \qquad \iint_{S \times S} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\varepsilon}}\, dx\, dy \leq \int_0^1 dt \int_{R^n} \sum_{j=1}^{p} |X_j\ u(z)|^2\, dz \cdot$$

$$\cdot \int_S \frac{|I_2^2(\gamma_{x,y(z)})|}{|x - y(z)|^{n+2\varepsilon}}\, dx$$

Da questa disuguaglianza si ottiene la (2.3) se

$$(2.6) \qquad I_2(\gamma_{(x,y)}) \leq C|x - y|^\sigma$$

per una opportuna $\sigma > \varepsilon$.

Per ottimizzare la stima (2.5) risulta quindi conveniente sce gliere, fra tutte le curve γ verificanti (2.1) e (2.2) (ammesso che ve ne siano sempre) "quella che minimizza" il funzionale $I_2(\gamma)$.

Se chiamiamo $d_2(x,y)$ tale "minimo" e se risulta, per ogni com patto K di Ω, e per ogni $x,y \in K$,

$$d_2(x,y) \leq C|x - y|^{\sigma} , \qquad C = C(K) ,$$

con $\sigma > 0$ indipendente da K, allora, per quanto precede, risulta

$$W_L \hookrightarrow H^{\varepsilon} , \qquad \forall \varepsilon < \sigma$$

Appare dunque chiaro che il problema della immersione (1.3) è legato alla *controllabilità* e alle proprietà dei *controlli* del sistema

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{cases} \dot{x} = A(x)\, \lambda(t) \\ x(0) = x \ , \quad x(1) = y \end{cases}$$

Nel seguito supporremo pertanto che il sistema (2.7) sia *controllabile*; esista cioè, $\forall\, x,y \in \Omega$, una funzione $\lambda\colon [0,1] \to R^p$, continua a tratti e limitata (un *controllo*) tale che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)\, \lambda(t) \\ x(0) = x \ , \quad x(1) = y \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\lambda\colon [0,1] \to \Omega$, continua e $C^{(1)}$ a tratti. Chiameremo *L-ammissibile* ogni curva γ del tipo ora detto e porremo

$$I_2(\gamma) = \left(\int_0^1 |\lambda(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}, \; I_1(\gamma) = \int_0^1 |\lambda(t)| \, dt \,.$$

Definizione 2.8. Per ogni $x,y \in \Omega$ poniamo

$$d_k(x,y) = \inf\{I_k(\gamma)/\gamma \text{ L-amm.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} , \quad k = 1,2 .$$

Ovviamente, per la disuguaglianza di Hölder, $I_1(\gamma) \leq I_2(\gamma)$ e, quindi, $d_1 \leq d_2$.

Proveremo fra poco che $d_1 = d_2$. A questo scopo introduciamo la seguente distanza su Ω.

Definizione 2.9. Sia $\lambda: [0,T] \to R^p$ una funzione continua a tratti e tale che $|\lambda(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0,T]$. Sia $\gamma: [0,T] \to \Omega$ una curva continua e $C^{(1)}$ a tratti tale che $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \lambda(t)$. Diremo allora che γ è *sub-unitaria* per L, e porremo $l(\gamma) = T$. Per ogni $x,y \in \Omega$ definiamo

$$d(x,y) = \inf\{l(\gamma)/\gamma \text{ sub-unitaria}, \gamma(0) = x, \gamma(l(\gamma)) = y\} .$$

Si riconosce subito che d è una distanza su Ω. Inoltre, se $\gamma: [0,T] \to \Omega$ è sub-unitaria per L e $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \lambda(t)$, allora $\tilde{\gamma}: [0,1] \to \Omega$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(Tt)$ è L-ammissibile e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = A(\tilde{\gamma}(t)) (\lambda(Tt) T) .$$

Pertanto, per $k = 1,2$,

$$I_k(\tilde{\gamma}) = \left(\int_0^1 |\lambda(Tt)|^k T^k dt\right)^{1/k} \leq T = l(\gamma) .$$

Ciò prova che è $d_k \leq d$ per $k = 1,2$.

Dalla Proposizione seguente si dedurrà, allora, $d_1 = d_2 = d$.

Proposizione 2.10. Per ogni $x,y \in \Omega$ risulta

$$d(x,y) \leq d_1(x,y)$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio sia $\gamma: [0,1] \to \Omega$ una curva L-ammissibile tale che $I_1(\gamma) < d_1(x,y) + \varepsilon$. Sarà pertanto $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))\,\lambda(t)$, con $\lambda: [0,1] \to R^p$ limitata e continua a tratti, tale che

$$\int_0^1 |\lambda(t)|\,dt = I_1(\gamma) < d_1(x,y) + \varepsilon .$$

Sia ora $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_q\}$ una scomposizione di $[0,1]$ tale che, posto $\mu_k = \sup_{[t_{k-1},t_k]} |\lambda|$, $k = 1,2,\dots,q$, si abbia

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k(t_k - t_{k-1}) < \int_0^1 |\lambda(t)|\,dt + \varepsilon .$$

Per ogni $k = 1,\dots,q$ poniamo ora

$$\gamma_k: [0, \mu_k(t_k - t_{k-1})] \to \Omega, \ \gamma_k(t) = \gamma(t_{k-1} + t/\mu_k) .$$

Si riconosce immediatamente che γ_k è una curva sub-unitaria per L che connette $\gamma(t_{k-1})$ e $\gamma(t_k)$. Allora

$$d(x,y) \leq \sum_{k=1}^{q} d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leq \sum_{k=1}^{q} l(\gamma_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \mu_k(t_k - t_{k-1}) < d_1(x,y) + 2\,\varepsilon .$$

La Proposizione seguente suggerirà il modo di definire la distanza d anche nel caso in cui l'operatore L non si scrive nella forma $\sum_{j=1}^{p} X_j^2$.

<u>Proposizione 2.11</u>. Supponiamo che il rango della matrice $A = [X_1,\dots,X_p]$ sia costante ed uguale a $\min(p,n)$ in ogni punto di Ω. Una curva $\gamma: [0,1] \to \Omega$, continua e $C^{(1)}$ a tratti, è L-ammissibile se, e solo se, esiste $\mu: [0,1] \to R^n$, continua a tratti e tale che

$$\text{(2.11a)} \qquad \dot\gamma(t) = (A\,A^T)\,(\gamma(t))\,\mu(t)$$

Si ha poi

$$\text{(2.11b)} \qquad I_1(\gamma) = \int_0^1 |A^T(\gamma(t))\,\mu(t)|\,dt\ .$$

Una curva $\gamma: [0,T] \to \Omega$ è sub-unitaria per L se vale (2.11a) e $|A^T(\gamma(t))\,\mu(t)| \le 1 \quad \forall\, t \in [0,T]$.

<u>Dimostrazione</u>. Se $\lambda: [0,1] \to R^n$ ($\lambda: [0,T] \to R^n$) è continua a tratti e $\gamma: [0,1] \to \Omega$ ($\gamma: [0,T] \to \Omega$) è continua, esiste una funzione continua a tratti μ, avente lo stesso dominio di λ, tale che

$$A(\gamma(t))\,\lambda(t) = (A\,A^T)\,(\gamma(t))\,\mu(t)$$

per ogni t. Ciò prova la Proposizione 2.11.

<u>Osservazione 2.12</u>. Se $L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 \equiv \sum_{i,k} \partial_i (b_{i,k}) + \dots$, risulta $A\,A^T = (b_{ik}) \equiv B$. Pertanto (2.11a) e (2.11b) si scrivono, rispettivamente, così

$$\text{(2.12a)} \qquad \dot\gamma(t) = B(\gamma(t))\,\mu(t)\ ;$$

$$\text{(2.12b)} \qquad I_1(\gamma) = \int_0^1 \langle B(\gamma(t))\,\mu(t), \mu(t)\rangle^{1/2}\,dt\ ;$$

infine, la condizione $|A^T(\gamma(t))\ \mu(t)| \le 1$ diventa $< B(\gamma(t))\ \mu(t), \mu(t) > \le 1$.

Osservazione 2.13. Se la matrice B è invertibile in ogni punto di Ω (cioè se L è ellittico in Ω), ogni curva γ $C^{(1)}$ a tratti e contenuta in Ω è L-ammissibile in quanto basta porre $\mu(t) = B^{-1}(\gamma(t))\ \dot\gamma(t)$ per avere $\dot\gamma(t) = B(\gamma(t))\ \mu(t)$. In questo caso

$$I_1(\gamma) = \int_0^1 < \dot\gamma(t), B^{-1}(\gamma(t))\ \dot\gamma(t) >^{1/2} dt \ ;$$

quindi $I_1(\gamma)$ è la *lunghezza* di γ nella metrica riemanniana d_r generata dalla forma bilineare

$$g(x;\xi,\eta) = < B^{-1}(x)\ \xi, \eta > .$$

Di conseguenza $d = d_r$.

Diamo ora la definizione di d nel caso generale.

Definizione 2.14. Sia $L = \sum_{i,k} \partial_i(b_{ik}\ \partial_k) + \dots$ l'operatore (1.1). Un vettore $\xi \in R^n$ si dice sub-unitario per L in X se risulta $\xi = B(x)\ \mu$ con $< B(x)\ \mu, \mu > \le 1$.

Una curva γ: $[0,T] \to \Omega$ continua e $C^{(1)}$ a tratti si dice sub-unitaria per L se $\dot\gamma(t)$ è sub-unitario in $\gamma(t)$, q.d. su $[0,T]$.

Infine, per ogni $x,y \in \Omega$, poniamo

$$d(x,y) = \inf\{T / \exists\ \gamma: [0,T] \to \Omega, \text{ sub-unitaria per } L, \\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\}$$

Vale allora il seguente Teorema di Fefferman e Phong [2]

Teorema 2.15. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) $W_L \hookrightarrow H^{\varepsilon}$

2) $\forall\, K \subset\subset \Omega\ \exists\ C = C(K,\varepsilon)$: $d(x,y) \leq C|x - y|^{\varepsilon}$, $\forall\, x,y \in K$.

Se $L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2$ e se rango $L(X_1,\ldots,X_p) = n$ in ogni punto di Ω, la distanza d si può valutare in modo abbastanza preciso. Infatti:

Teorema 2.16. Se esiste un intero positivo m tale che lo spazio vettoriale generato da

$$\{X_I(x)/|I| \leq m\}$$

ha dimensione n in ogni punto di Ω, allora, per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$ esiste $C = C(K)$ tale che

$$d(x,y) \leq C|x - y|^{1/m}, \quad \forall\, x,y \in K .$$

Dimostrazione. Se $X \in C^{\infty}(\Omega, R^n)$, $x \in \Omega$ e $t \in R$, indichiamo con $e^{tX}(y)$ il valore della soluzione al tempo t del problema di Cauchy $\dot{x} = X(x)$, $x(o) = y$. La funzione e^{tX} è, quindi, una traslazione di ampiezza t lungo le traiettorie di X. Risulta

$$e^{tX}(x) = x + t\, X(x) + t^2\, O(1) , \tag{2.16a}$$

dove, qui e nel seguito, $O(1)$ indica una funzione limitata sui compatti di $]-\delta,\delta[\, \times\, \Omega$, $\delta > 0$ opportuno. Sia ora $J = (Y_1,\ldots,Y_r)$ una r-pla ordinata di vettori $Y_j \in \{\pm X_1,\ldots, \pm X_p\}$, $j = 1,\ldots,r$; poniamo, se $t \in R$,

$$E(J,t) = e^{t\, Y_r} \circ \ldots \circ e^{t\, Y_1}$$

Si noti che $d(x, E(J,t)\ (x)) \le r|t|$, in quanto, posto $x_o = x$ e $x_k = e^{t\,Y_r}(x_{k-1})$, $k = 1,\dots,r$, risulta $d(x_{k-1}, x_k) \le |t|$ e, quindi,

$$d(x, E(J,t)\ (x)) = d(x_o, x_r) \le \sum_{k=1}^{r} d(x_{k-1}, x_k) \le r|t|$$

Se X_I è un commutatore dei campi $X_1,\dots,X_p$, di lunghezza $|I| = m$, utilizzando la formula di Campbell-Haurdorf si dimostra (cfr. [6], pag. 163) l'esistenza di una r-pla J tale che

$$\text{(2.16b)} \qquad \exp(t^m X_I) = E(J,t) + H(t)$$

dove $H(t)\ (x) = O(1)\ t^{m+1}$.

Allora

$$\text{(2.16c)} \qquad \exp(\tau X_I) = \begin{cases} E(J,\tau^{1/m}) + H(\tau^{1/m}), \text{se } \tau \ge 0 , \\ E(J^-,(-\tau)^{1/m}) + H^-((-\tau)^{1/m}), \text{se } \tau < 0 , \end{cases}$$

dove J^- è una r-pla tale che

$$E(J^-,t) + H^-(t) = \exp(t^m(-X_I))$$

con $H^-(t) = O(1)\ t^{m+1}$; si noti che $(-X_I)$ è un commutatore di lunghezza m. Poniamo

$$E_I(\tau) = \begin{cases} E(J,\tau^{1/m}), \text{se } \tau \ge 0 \\ E(J^-,(-\tau)^{1/m}), \text{se } \tau < 0 . \end{cases}$$

Proviamo che la funzione $(\tau,x) \to E_I(\tau)\ (x)$ è di classe $C^{(1)}$.

E' sufficiente provare la continuità di $\partial E_I(\tau)(x)/\partial\tau$. Se $\tau > 0$ si ha

$$\frac{E_I(\tau + h)(x) - E_I(x)}{h} = (\tau + h = t^m,\ \tau = t_o^m) =$$

$$= \frac{E(J,t) - E(J,t_o)}{t^m - t_o^m} \xrightarrow[h \to o]{} \partial E(J,t_o)/\partial t/m\ t_o^{m-1} =$$

$$= (\text{per}(2.16b)) = X_I(\exp(t_o^m X_I)(x)) + \frac{\partial}{\partial t} H(t_o)(x)/m\ t_o^{m-1} =$$

$$= X_I(x) + \tau^{1/m}\, 0(1)\ .$$

Analogamente, per $\tau < 0$, si ricava

$$\partial E_I(\tau)(x)/\partial\tau = X_I(x) + |\tau|^{1/m}\, 0(1)$$

ciò prova la regolarità di E_I.

Siano ora $X_{I_1},\dots,X_{I_n}$ n commutatori di $X_1,\dots,X_p$, linearmente indipendenti in un fissato punto $x_o \in \Omega$. Sia $m_j = |I| \le m$, $j = 1,\dots,m$.

Consideriamo la funzione F definita in un intorno dello zero di R^n nella maniera seguente

$$F(t) = F(t_1,\dots,t_n) = E_{I_n}(t_n) \circ \dots \circ E_{I_1}(t_1)(x_o)\ .$$

Per quanto precede F è di classe $C^{(1)}$. Inoltre, poiché $E_I(\tau)(x) = x + \tau\, X_I(x) + |\tau|^{(m+1)/m}\, 0(1)$, se $|I| = m$, si ha

$$F(t) = x_o + \sum_{j=1}^{n} X_{I_j}(x_o)\, t_j + |t|^{1+1/m}\, 0(1)$$

Pertanto

$$\frac{\partial F}{\partial t}(o) = [X_{I_1}(x_o),\dots,X_{I_n}(x_o)]$$

è invertibile e, quindi, per il Teorema di invertibilità locale, esistono $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $M > 0$ tali che $F(\{|t| < \rho\}) \supseteq \{|x - x_o| < \sigma\}$ e

$$|F(t) - F(o)| \geq M|t|, \quad \forall\, t \in R^n,\ |t| < \rho .$$

Sia ora $x \in \{|x - x_o| < \sigma\}$ e sia $t \in R^n$, $|t| < \rho$, tale che $F(t) = x$.

Posto $x_k = E_{I_k}(t_k)(x_{k-1})$ per $k = 1,2,\dots,n$, si ha

$$d(x_o,x) \leq \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1},x_k) = \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1}, E_{I_k}(t_k)(x_{k-1})) \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{n} |t_k|^{1/m_k} \leq C_2|t|^{1/m} \leq$$

$$\leq (C_2/M^{1/m})\ |F(t) - F(o)|^{1/m} = C_3|x - x_o|^{1/m}$$

Poiché le costanti ρ, σ ed M si possono scegliere dipendenti solo dal compatto $K \ni x_o$, $K \subset \Omega$, ciò prova l'asserto.

Il Teorema di Rothschild e Stein è, quindi, una conseguenza del Teorema di Fefferman e Phong e del Teorema 2.15. Dalla dimostrazione da noi fornita di questo ultimo, si deduce il Teorema di connettività di Chow-Hermann.

Corollario 2.16. Sia Ω un aperto connesso di R^n e siano $X_1,\dots,X_p \in C^\infty(\Omega,R^n)$ tali che rango $L(X_1,\dots,X_p) = n$ in ogni punto di Ω. Allora, per ogni coppia di punti $x,y \in \Omega$, esiste una poligonale continua $\gamma \subset \Omega$ che connette x ed y, ciascun lato della quale è curva integrale di uno dei campi $\pm X_1,\dots, \pm X_p$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DERRIDJ M.: Sur une classe d'opérateurs différentiels elliptiques à coefficients analytiques, Séminaire Goulaonic-Schwartz 1970/71, Exposé n. 12.

[2] FEFFERMAN C. e PHONG D.H.: Subelliptic Eigenvalue Problems, Conference on Harmonic Analysis (Chicago, 1981). Wadsworth international mathematics series (1983) 590-606.

[3] FRANCHI B. e LANCONELLI E.: Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino.

[4] HERMANN R.: Differential Geometry and the Calculus of Variations, Academic Press, New York and London (1968).

[5] HERMES H. e LASALLE J.P.: Functional Analysis and Time Optimal Control, Academic Press, New York and London (1969).

[6] HÖRMANDER L.: Hypoelliptic Second-Order Differential Equations, Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[7] ROTHSCHILD L. - STEIN E.M.: Hypoelliptic Differential Operators and nilpotent groups, Acta Math. 137 (1976), 247-320.

[8] SUSSMANN H.: Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1979), 171-188.